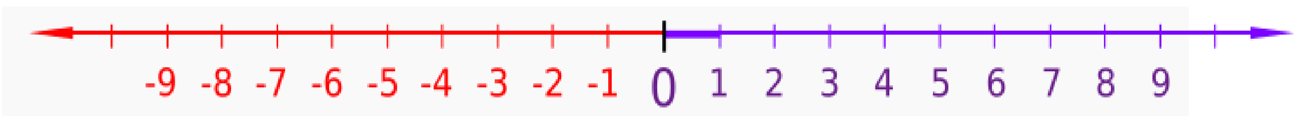
Unidad I

Números Reales

1.1 La Recta Numérica

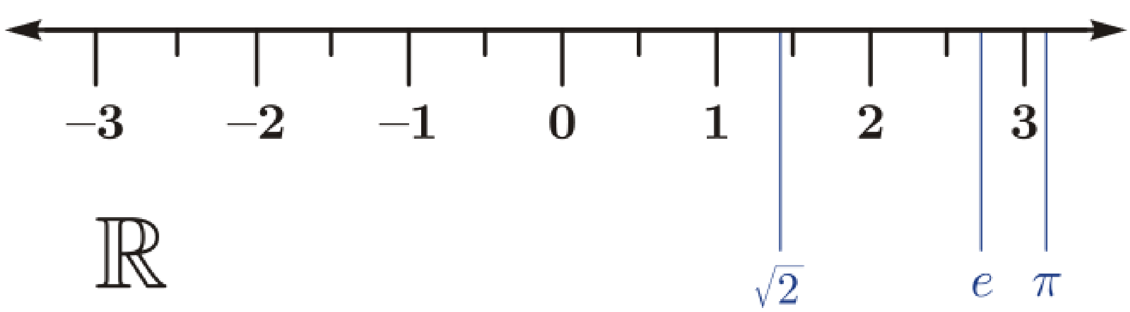
La **recta numérica** es un gráfico unidimensional de una línea recta en la que los números enteros son mostrados como puntos especialmente marcados que están separados uniformemente. Frecuentemente es usada como ayuda para enseñar la adición y la sustracción simple, implicando especialmente números negativos.



Está dividida en dos mitades simétricas por el origen, es decir el número cero. En la recta numérica mostrada arriba, los números negativos se representan en rojo y los positivos en morado.

La **recta numérica real** o **recta de coordenadas** es una representación geométrica del conjunto de los números reales. Tiene su origen en el cero, y se extiende en ambas direcciones, los positivos en un sentido (normalmente hacia la derecha) y los negativos en el otro (normalmente a la izquierda). Existe una correspondencia uno a uno entre cada punto de la recta y un número real. Se usa el símbolo $\mathbb{R}$ para este conjunto.

Se construye como sigue: se elige de manera arbitraria un punto de una línea recta para que represente el cero o punto origen. Se elige un punto a una distancia adecuada a la derecha del origen para que represente al número 1. Esto establece la escala de la recta numérica.



1.2 Los Numeros Reales

Los números reales son el conjunto de números naturales, cardinales, enteros racionales e irracionales.

Los números naturales surgen de la necesidad de contar, de enumerar.
1, 2, 3,…

Los números cardinales son el conjunto de números naturales y el cero.
0, 1, 2, 3, 4, 5…

Los números enteros consisten de los números naturales, sus opuestos y el cero.
…-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,…

Número entero positivo es todo entero positivo mayor de cero.
1, 2, 3, 5,347, 1, 702,445...

Número entero negativo es todo entero negativo menor que cero.
-1, 000,345, -57, -3,- 4,- 2,- 1,

El cero representa el lugar de partida en alguna dirección. No es positivo ni negativo.

Los números racionales representan partes de un todo, un cociente que ha sido dividido en partes iguales.

$\frac{1}{8}$, 7.4, -2.35, 8, -25

Los números irracionales son números que no pueden ser expresados como cociente de dos números enteros.

0.789, 3.1456,

1.3 Propiedades de los números reales.

Los números naturales 1, 2, 3, ... , han sido creados por el hombre para contar los objetos de conjuntos finitos, el número natural n es una medida de la cantidad de objetos de un conjunto.
Pero es necesario medir o comparar también longitudes, áreas, volúmenes, pesos, cantidades de calor, de electricidad, etc.. Para este tipo de cantidades sabemos decidir cuándo dos de ellas son equivalentes o iguales, mediante experiencias apropiadas. (Dos varillas que se pueden hacer coincidir son iguales en longitud, dos cuerpos que equilibran una balanza de platillos son iguales en peso, etc.). Se sabe además sumar dos cantidades de una misma especie y subdividir una cantidad dada en n partes iguales.

De ahora en adelante, consideraremos el problema de medir cantidades en el caso de longitudes. El problema de precisar la noción de medida o longitud de un segmento se presentó tempranamente a los geómetras griegos hace unos 25 siglos.

Dado un segmento OU que se considerará como unidad de medida y otro segmento PQ, puede ocurrir que PQ se pueda partir en n segmentos iguales a OU; en este caso n es la medida o longitud del segmento PQ (con respecto a la unidad OU).

Naturalmente, la circunstancia anterior es casual. En general, OU no "cabrá un número exacto de veces" en PQ.
Subdividamos ahora la unidad OU en m partes iguales. Se dice que cada una de estas partes (submúltiplos de OU) tiene longitud igual a $1/m$
. Si se tiene un segmento PQ que puede dividirse en exactamente n partes iguales de longitud $1/m$, se dice que la longitud de PQ es n/m .

Históricamente, los números racionales han surgido de la necesidad de medir distintos tipos de cantidades y las operaciones entre ellos (suma y producto) aparecieron naturalmente en la forma que se indica en el párrafo anterior.

Dado un segmento OU, puede preguntarse si cualquier segmento PQ tiene una medida racional con respecto a la unidad OU, en la forma indicada antes, es decir, si hay algún submúltiplo de OU que "quepa exactamente" un número entero de veces en PQ. La respuesta es negativa y fue dada por los matemáticos Pitagóricos de la manera que veremos a continuación:

La hipotenusa OP de un triángulo rectángulo isósceles ∆OPU no tiene medida racional con respecto a la unidad OU..

1) Propiedad Conmutativa: a+b = b+a Sean a,b pertenecientes a los reales.
2) Propiedad Asociativa: (a+b)+c=a+(b+c) Sean a,b,c pertenecientes a losreales.
3) Existencia de elemento inverso(inverso aditivo): a+(-a)=0
4) Existencia de elemento neutro: a+0 =a
5) Propiedad Conmutativa del producto: a.b=b.a
6) Propiedad Asociativa del producto: (a.b).c= a.(b.c)
7) Existencia de elemento inverso: a.1/a = 1
8) Existencia de elemento neutro(del producto) : a.1 = a
9) Propiedad Distributiva: (a+b).c = ac+bc (a.b)+c=(a+c).(b+c)
10) Tricotomia : a>b , a<b o a=b
11) Monotonia de la suma
12) Monotonia del producto.
13) Propiedad Transitiva a>b>c entonces a>c
14) Propiedad Uniforme

1.3.1 Tricotomía

Es una propiedad de gran importancia para la matemática, que es orden que podemos tener.
Es una división en tres partes.
Ejemplo
R es un conjunto ordenado.
Si X y Y pertenecen a R se puede decir que x > y es verdadera o no es verdadera.
Una forma para decir que para cada x y y en R se cumple solo una de las siguientes, Afirmaciones, x > y ; x < y ; x =y
Con ya ayuda de este proceso podemos observar como el es valor R de los conjuntos

1.3.2 Transitividad.

En esta Propiedad tiene Relación R sobre un conjunto A es transitiva cuando siempre un elemento se relaciona con otro y este ultimo con un tercero. Ejemplo:
Una relación X<Y y Y<Z entonses X<Z
Por una forma de ordemar si este cumple se puede ver los valores con los cuales se resumiria la exprecion.

1.3.3 Densidad.

Dados dos números racionales distintos, $\alpha < \beta$, siempre existe otro número racional γ tal que $\alpha < \gamma < \beta$.

Para ello, si $\alpha = \frac{a}{b}$ y $\beta = \frac{c}{d}$, con b y d positivos, basta con tomar $\gamma = \frac{a+c}{b+d}$

Ejercicio: probar que efectivamente $\alpha < \gamma < \beta$ (por ejemplo, entre 3/5 y 2/3 se encuentra 5/8)
Ahora bien, reiterando el proceso de intoducir un racional entre cada dos racionales distintos es claro que entre dos racionales distintos existen infinitos racionales distintos,

Por ejemplo, ahora entre 3/5 y 5/8 se encuentra 8/13, entre 3/5 y 8/13 se encuentra 11/18, etc., tenemos asi 3/5 < ...... < 11/18 < 8/13 < 5/8 < 2/3.
por eso se dice que el conjunto de los racionales es un conjunto denso. No tiene sentido hablar del racional siguiente o anterior a uno dado. Esto es algo que no ocurría ni en el conjunto de los naturales ni en el de los enteros.

1.3.4 Axioma del supremo.

Se compone el cuerpo de los numeros reales si E c R es un conjunto no vacion acotado superiormente en R entonces E tiene supremo.

1.4 - Intervalos y su representacion mediante desigualdades.

Una desigualdad es de una forma: 10 + 3 es mayor que 6. Se le representa por:
Desigualdad: 10 + 3 > 6
Esta desigualdad se transforma en inecuación, cuando se introduce una incognita:
Inecuacion: 10 + x > 6

En la recta numérica existe una relación de orden.
Cuando tenemos dos puntos de la recta numérica A y B, se pueden dar una de tres alternativas:
A es mayor que B A > B
A es igual a B A = B
A es menor que B A < B

Entonses por lo siguiente:
A > B v A=B

Destacamos que a < b es equivalente a b>a y así con otras expresiones, que se pueden “dar vuelta”.

Intervalos en los Reales (IR)
La Expresión: {x IR / a < x < b} se conoce como Intervalo, representa al conjunto de todos los números reales que
están entre otros dos reales “a” y “b” dados. En este caso x no puede ser ni “a” ni “b”.

Tipos de Intervalos:
Intervalo Abierto: Conjunto de números entre a y b, sin incluirlos, se simboliza por: ( )

Intervalo Cerrado: Conjunto de números entre a y b, incluidos ambos. Se simboliza po: [ ]

Intervalo Semiabierto por Derecha: Intervalo de puntos entre a y b, que incluye a “a” pero excluye a “b”. Simboliza: [ )

Intervalo Semiabierto por Izquierda: ( ]

Representación GRAFICA de intervalos:

[-3,6] $-3 \leq x \leq 6$

(4,9) $4 < x < 9$

(1,+ ∞) $1 < x < +\infty$

1.4 Resolución de desigualdades de primer grado con una incógnita y de desigualdades

cuadráticas con una incógnita.

La expresión [illegible] significa que [illegible] no es igual a [illegible]. Según los valores particulares de [illegible] y de [illegible],

puede tenerse que [illegible] o que [illegible]. La notación [illegible] significa que [illegible] o que [illegible] pero no ambos.

Por otra parte la notación ́□ ̦ significa que ́□ ̦ o que ́ด ͦ ป ̦ pero no ambos.

Una desigualdad se obtiene al escribir dos expresiones numéricas o algebraicas re lacionadas con

alguno de los símbolos <,>, □, □. Algunos ejemplos de desigualdades son:

6 □ 9

̦ □ 13

́ □ 5

پ৪ □ 1

Al igual que en las igualdades, en toda desigualdad, los términos que están a la iz quierda del signo

de la desigualdad, forman el primer miembro de la desigualdad, y los términos de l a derecha,

forman el segundo miembro.

Existen dos clases de desigualdades: las absolutas y las condicionales.

La desigualdad absoluta es aquella que se cumple para cualquier valor que se le a tribuya a las literales que figuran en ella. Por ejemplo: پ৪ □ 1 □ پ

La desigualdad condicional es aquella que solo se cumple para ciertos valores de l as literales que

figuran en ella. Por ejemplo: 3پ ด ͦ 15 □
0 que solamente se cumple para valores tales que پ□5.

Las desigualdades condicionales se llaman inecuaciones.

1.5 Valor absoluto y sus propiedades.

El valor absoluto de un número real, a, es el propio número a, si es positivo, o su opuesto, -a, si es negativo:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

(Es decir, consiste en convertirlo en positivo)

2. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre dos puntos “a” y “b” es su diferencia en valor absoluto: |a – b|

3. ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Inecuaciones de la forma $|x| > a,\ a > 0:\ \ |x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ ó } x < -a$

Inecuaciones de la forma $|x| < a,\ a > 0:\ \ |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

4. Solución de Ejercicios propuestos:

a) |x-1| <5

1.7 Resolución de desigualdades que incluyan valor absoluto.

La solución de desigualdades que implican valor absoluto requiere algunos conceptos básicos. La definición básica “ El valor absoluto de un número es siempre positivo” no tiene ningún uso mientras se resuelven tales desigualdades. Por el contrario, la explicación geométrica del valor absoluto “El valor absoluto de un número es la distancia del mismo con respecto del número 0 en la recta numérica” debe ser considerado. Por ejemplo: Como 5 está a la distancia de 5 unidades del origen, es por eso que el valor absoluto de **|** 5 **|** es 5.

$$\frac{d(x^n)}{dx} = n\frac{d(x^{n-1})}{dx}$$

De la misma forma, el valor absoluto de −5 es también 5. | −5 | = 5.

$$\frac{d(f(x)g(x))}{dx} = \frac{g(x)\frac{d(x)}{dx} - f(x)\frac{g(x)}{dx}}{g(x)^2}$$

Con el fin de resolver las desigualdades con valor absoluto es necesario tomar dos patrones en cuenta:

Patron 1: Menor desigualdad absoluta

De acuerdo con este patrón, si la desigualdad a ser resuelta es de la forma $| s | < a$, entonces en ese caso, la solución correspondiente siempre tendrá la forma de $-a < s < a$.

Este concepto es válido incluso para las desigualdades de alta complejidad.

Por ejemplo: $| x + 3 | < 7$

De acuerdo con el patrón, puede ser reformulada como

$= - 7 < x + 3 < +7$

Después de replanteada siguiendo el patrón 1, ahora puede ser resuelta de acuerdo con los fundamentos de la desigualdad, es decir,

$- 7 - 3 < x < + 7 - 3$

$- 10 < x < +4$

Por tanto, la solución está en el intervalo de $(-10, +4)$.

Patrón 2: Mayor desigualdad absoluta

De acuerdo con este patrón, si $| s | > a$ es el patrón de la desigualdad dada, entonces la solución puede ser obtenida mediante separar la desigualdad en dos partes, que son $s < -a$ o $s > a$.

Por ejemplo: $| x + 5 | > 8$

Siguiendo de acuerdo con el patrón $x + 5 < - 8$ o $x + 5 > 8$

Ahora, la desigualdad puede ser resuelta junta como

$x < -8 - 5$ o $x > 8 - 5$

$x < -13$ o $x < 3$

Por tanto, la solución consiste en dos intervalos $x < -13$ o $x < 3$.

Otra variedad de problemas pueden ocurrir cuando se da un par de desigualdades con el fin de encontrar las desigualdades con valor absoluto correspondiente. Para resolver este tipo de problemas, es necesario seguir algunos pasos. En primer lugar, mirando los extremos de las desigualdades dadas. El siguiente paso consiste en calcular la diferencia entre los extremos determinados. Ahora, ajustando las desigualdades con la mitad de la diferencia calculada dará las desigualdades en la forma que cualquiera de los dos patrones puede ser aplicado.

La aplicación de estas reglas puede ser demostrada con la ayuda de un ejemplo:

Supongamos que las desigualdades provistas son:

De acuerdo con las reglas, los extremos determinados son 24 y 19. Estos extremos están a 5 unidades de distancia. Por tanto, las desigualdades se puede ajustar entre la mitad de la diferencia, es decir −2.5 a +2.5.

Ahora, desde $19 - (-2.5) = 21.5$ y $24 - 2.5 = 21.5$, por tanto 21.5 se necesita para ser restado de todos los lados de las desigualdades.

$x < 19$ o $x > 24$

$x - 21.5 < 19 - 21.5$ o $x - 21.5 > 24 - 21.5$

$x - 21.5 < -2.5$ o $x - 21.5 > 2.5$

Se puede observar que el resultado es de la forma “mayor que”. Por tanto, el resultante de la desigualdad con valor absoluto es $| x - 21.5 | > 2.5$